SF1624 Algebra och geometri

Sjätte föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

5 november, 2009

Trippelprodukt

Om vi har tre vektorer i rummet, $\overline{u}$, $\overline{v}$ och $\overline{w}$ kan vi bilda trippelprodukten

$$\overline{u} \times \overline{v} \cdot \overline{w} = \overline{v} \times \overline{w} \cdot \overline{u} = \overline{w} \times \overline{u} \cdot \overline{v}$$

som är ett tal vars belopp är lika med volymen av parallellepipeden som spänns up av de tre vektorerna. Volymen av tetraedern som spänns upp av dem är

$$\frac{|\overline{u} \times \overline{v} \cdot \overline{w}|}{6}.$$

Vi har också att

$$\overline{u} \times \overline{v} \cdot \overline{w} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{u}, \overline{v} \text{ och } \overline{w} \text{ ligger i samma plan}$$

Plan i rummet

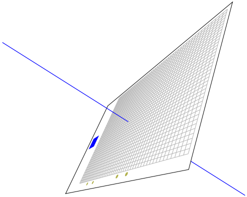
Vi har ett att om $P_o = (x_0, y_0, z_0)$ är en punkt i planet och $\overline{n}$ är en normalvektor till planet så fås en ekvation för planet genom

$$ax + by + cz = d$$

där $d = ax_0 + by_0 + cz_0$.
Vi kan beräkna en normalvektor genom vektorprodukten:

$$\overline{n} = \overline{P_0P_1} \times \overline{P_0P_2}$$

där P_0, P_1 och P_2 är punkter i planet.



Plan i rummet - med parametrar

Ett annat sätt att beskriva ett plan i rummet är med hjälp av parametrar. Om P_0 är en punkt i planet och $\overline{u}$ and $\overline{v}$ är vektorer i planet, kan alla punkter P i planet beskrivas av

$$\overline{OP} = \overline{OP_0} + s\overline{u} + t\overline{v}$$

för reella parametrar s och t. (Om inte $\overline{u}||\overline{v}$)

Linjer i rummet

En linje i rummet kan inte beskrivas av bara en ekvation. Vi kan använda en parameterframställning,

$$\overline{OP} = \overline{OP_0} + t\overline{v}$$

där P_0 är en punkt på linjen, $\overline{v}$ en vektor utmed linjen och t är en reell parameter.
Vektorn $\overline{v}$ kallas linjens riktningsvektor.

Projektion på linje

För att projicera en punkt P på en linje L kan vi ta en vektor från en punkt Q på linjen till punkten P och projicera på linjens riktningsvektor.

Exempel (Uppgift 3 på tentamen 2009-10-23)

Använd linjen $(x, y, z) = (2, 1, -1) + t(0, 1, -2)$ och punkten $(0, 1, 1)$ för att visa hur man med hjälp av projektion finner den punkt på en given linje som ligger närmast en given punkt.